# 一种基于均衡交补分担准则的证据组合新方法

郎风华, 谷利泽, 杨义先, 钮心忻

(1. 北京邮电大学网络与交换技术国家重点实验室信息安全中心, 北京 100876; 2. 北京邮电大学网络与信息攻防技术教育部重点实验室, 北京 100876; 3. 灾备技术国家工程实验室, 北京 100876)

摘 要: 针对 Dempster 及其改进证据组合公式的不足, 提出一种基于均衡交补分担准则的证据组合新方法. 首先分析原始 Dempster 证据组合方法的优势和劣势, 然后利用均衡交补信度分配原则合成新的 mass 函数, 最后数值实例对比实验表明新组合方案不但保持了原始 Dempster 组合方法的优势, 而且弥补了其缺陷.

关键词: D-S 证据理论; Dempster 组合规则; 交补分担原则; 均衡信度分配

中图分类号: TP18 文献标识码: A 文章编号: 0372-2112 (2009) 01-0095-06

# A Novel Evidence Combination Method Based on Proportional Conjunctive and Complementary Pooling Criterion

LANG Feng-hua, GU Li-ze, YANG Yi-xian, NIU Xin-xin

(1. *Information Security Center, State Key Laboratory of Networking and Switching Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*; 2. *Key Laboratory of Network and Information Attack & Defence Technology of MOE, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*; 3. *National Engineering Laboratory for Disaster Backup and Recovery, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*)

**Abstract:** To solve the drawbacks of Dempster rule and improved rule of combination, a novel evidence combination method based on proportional conjunctive and complementary pooling criterion was presented. Firstly, the advantages and disadvantages of Dempster rule of combination were analyzed. Secondly, a new mass function based on proportional belief criterion of conjunctive and complementary belief was combined. Finally, the results of numerical examples show that the proposed approach of combination can not only maintain the advantages of original Dempster rule of combination, but also make up for its disadvantages.

**Key words:** evidence theory; Dempster rule of combination; conjunctive and complementary pooling; proportional belief assignment

## 1 引言

D-S 证据理论源于 20 世纪 60 年代哈佛大学数学家 A. P. Dempster 基于上、下概率解决多值映射问题[1]的研究, 后经 G. Shafer 对该理论的进一步完善[2], 逐步形成了一套利用"证据"和"组合"处理不确定性推理问题的数学方法. 作为不确定信息表达和合成的强有力工具, D-S 证据理论已在信息融合[3]和信息安全[4,5]等领域得到广泛应用. 然而在实际应用中, D-S 证据理论有时会产生与直觉相悖的结果[6,7]. 为解决这一问题, 国内外专家学者提出了众多的改进方案, 但是现有的方案在某种程度上都存在许多值得商榷的问题, 经常出现顾此失彼现象.

本文首先剖析 Dempster 组合公式的优缺点, 然后提出一种基于均衡交补分担准则的证据组合新方法, 最后通过数值对比实验验证了新方法不但保持了原始 Dempster 组合方法的优势, 而且弥补了其不足.

## 2 Dempster 证据组合

在证据理论中, 辨识框架 $\Theta=\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ 由一系列两两互斥的对象构成. 在辨识框架的基础上, 基本信度分配 bba(basic belief assignment) 定义如下:

**定义 1** 设 $\Theta$ 是辨识框架, $2^\Theta$ 是表示 $\Theta$ 的幂集, 若函数 $m: 2^\Theta \to [0,1]$ 满足:

$$\begin{cases} m(\varnothing)=0 \\ \sum_{A\in 2^\Theta} m(A)=1 \end{cases} \tag{1}$$

则称 $m$ 是 $\Theta$ 上的基本信度分配 mass 函数, 其中使得

收稿日期: 2008-02-18; 修回日期: 2008-08-20

基金项目: 国家 973 重点基础研究发展规划(No. 2007CB310704); 国家自然科学基金(No. 60673098); 国家自然科学基金与香港研究资助局联合科研基金(No. 60731160626)

$m(A)>0$的集合 A 称为焦元.

在 mass 函数的基础上,信任测度函数和似然测度函数定义如下:

**定义 2** 辨识框架 $\Theta$ 上基于 bba 的信任测度函数(Belief Measure Function)定义为:

$$Bel(A)=\sum_{B\subseteq A}m(B) \tag{2}$$

**定义 3** 辨识框架 $\Theta$ 上基于 bba 的似然测度函数(Plausibility Measure Function)定义为:

$$Pl(A)=\sum_{A\cap B\neq\varnothing}m(B)=1-Bel(A^C) \tag{3}$$

式(3)中的 $A^C$ 表示集合 $A$ 关于 $\Theta$ 的补集.

因为多证据合成是 D-S 证据理论要解决的一个重要问题,所以 Dempster 定义了证据组合方法.

**定义 4** 设辨识框架 $\Theta$ 下的 $n$ 个证据 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 对应的 mass 函数为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$,相应的焦元为 $A_1,A_2,\cdots,A_N$,则 $n$ 个证据的 Dempster 组合方法为:

$$m(A)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-K}\sum\limits_{\bigcap m_i(A_i)=A}\left(\prod\limits_{j=1}^{n}m_j(A_j)\right), & A\neq\varnothing\\ 0, & A\neq\varnothing\end{cases} \tag{4}$$

其中:

$$K=\sum_{\bigcap m_i(A_i)=\varnothing}\left(\prod_{j=1}^{n}m_j(A_j)\right)=1-\sum_{\bigcap m_i(A_i)\neq\varnothing}\left(\prod_{j=1}^{n}m_j(A_j)\right) \tag{5}$$

式(5)中的 $K\in[0,1]$反映了证据间冲突的程度,$K$ 值越接近 1 表明证据间的冲突越大;反之,越接近 0 则表明证据间的冲突越小.

## 3 Dempster 证据组合方法的优势

国内外学者提出的改进证据组合方法一般都会提到 Dempster 组合方法的不足,但很少提及其优势,这就使得众多的改进方法在解决 Dempster 组合方法不足的同时也牺牲了原有的 Dempster 证据组合方法的优势,以下从四个方面说明其优势:

(1)组合后未知的 bba 不大于任意一个证据中未知的 bba:不妨设 $\Theta$ 下的 $n$ 个证据 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 对应的 mass 函数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$,则

$$m(\Theta)\leqslant m_i(\Theta)\ ,\ i=1,2,\cdots,n$$

不失一般性,现以两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 为例证明结论:①若 $m_1(\Theta)=0$ 或者 $m_2(\Theta)=0$,由式(4)易知 $m(\Theta)=0$;②若 $m_1(\Theta)>0$ 且 $m_2(\Theta)>0$,则不妨设证据 $E_1$ 的焦元为 $\Theta$ 和 $X_i,i=1,2,\cdots,m$,证据 $E_2$ 的焦元为 $\Theta$ 和 $Y_j,j=1,2,\cdots,n$,由式(4)可得组合后 $\Theta$ 的 bba 为:

$$m(\Theta)=\frac{m_1(\Theta)m_2(\Theta)}{1-\sum\limits_{X_i\cap Y_j=\varnothing}\{m_1(X_i)m_2(Y_j)\}}$$

因为

$$\sum_{X_i\cap Y_j=\varnothing}\{m_1(X_i)m_2(Y_j)\}\leqslant\sum_{\substack{X_i,i=1,2,\cdots,m\\Y_j,j=1,2,\cdots,n}}\{m_1(X_i)m_2(Y_j)\}$$
$$=\Big(\sum_{X_i,i=1,2,\cdots,m}m_1(X_i)\Big)\Big(\sum_{Y_j,j=1,2,\cdots,n}m_2(Y_j)\Big)$$
$$=(1-m_1(\Theta))(1-m_2(\Theta))$$

所以

$$m_{\max}(\Theta)=\frac{m_1(\Theta)m_2(\Theta)}{1-(1-m_1(\Theta))(1-m_2(\Theta))}\text{,故}$$

$$\frac{1}{m_{\max}(\Theta)}=\frac{m_1(\Theta)+m_2(\Theta)-m_1(\Theta)m_2(\Theta)}{m_1(\Theta)m_2(\Theta)}$$
$$=\frac{1}{m_1(\Theta)}+\frac{1}{m_2(\Theta)}-1$$

因为

$$m_1(\Theta)\in[0,1],m_2(\Theta)\in[0,1],m_{\max}(\Theta)\in[0,1]$$

所以

$$\frac{1}{m_{\max}(\Theta)}\geqslant\frac{1}{m_1(\Theta)}\quad\text{且}\frac{1}{m_{\max}(\Theta)}\geqslant\frac{1}{m_2(\Theta)}.$$

由此可得结论:

$$m(\Theta)\leqslant m_{\max}(\Theta)\leqslant m_1(\Theta);m(\Theta)\leqslant m_{\max}(\Theta)\leqslant m_2(\Theta)$$

上述优势表明:组合后信息的未知程度随着证据数量的不断增多而有减少的趋势,这符合人类的直觉,即不确定度随信息量的增加而降低.

(2)从优势(1)可以得出,若某一证据满足 $m_i(\Theta)=0$,则组合后必然有 $m(\Theta)=0$,而 Murphy[6]和 Zheng[11]的改进组合规则则不满足这一点.

(3)在一定条件下[6],应用 Dempster 组合规则后某些焦元可以产生收敛现象:在辨识框架 $\Theta$ 下的某个焦元 $A$,满足 $m(A)>m_i(A),i=1,2,\cdots,n$.这一点类似于遗传算法中的变异算子,它使得证据组合后的"种群"更具有多样性和灵活性.下面的例子说明了这一收敛现象:

**例 1** 设辨识框架 $\Theta=\{a,b\}$,两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 的 bba 如下:

$$E_1:m_1(\{a\})=0.6\ ,\ m_1(\{b\})=0.4;$$
$$E_2:m_2(\{a\})=0.6\ ,\ m_2(\Theta)=0.4$$

由式(4)得:$m(\{a\})=0.79\ ,\ m(\{b\})=0.21$.

由上述计算结果可以看出,$m(\{a\})>m_1(\{a\})$且 $m(\{a\})>m_2(\{a\})$,这是因为 $m_1(\{a\})$和 $m_2(\{a\})$均为 0.6,同时 $m_2(\Theta)=0.4$ 对 $m(\{a\})$有额外的"支持".从算式结构上看,分子已保证 $m(\{a\})$至少为 0.6,然后通过归一化以补偿由于冲突 $k=0.24$ 而丢失的 bba.

必须注意的是,若没有归一化带来的补偿效应,则决不会出现 Dempster 组合规则的收敛现象.

## 4 Dempster 证据组合规则的不足

对 Dempster 证据组合规则的不足已有大量文献论

述,但论述都不是很全面,现从五个方面阐述:

(1)Zadeh 悖论[8]问题:当证据中衡量各个证据之间冲突程度的系数 $K \to 1$ 时会出现与直觉相悖的结果.下面的例子说明了这一现象:

**例 2**　设辨识框架 $\Theta = \{a, b, c\}$,两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 的 bba 如下:

$$E_1: m_1(\{a\}) = 0.99\ ,\ m_1(\{b\}) = 0.01;$$

$$E_2: m_2(\{b\}) = 0.01\ ,\ m_2(\{c\}) = 0.99$$

由式(5)得 $K = 0.9999$,由式(4)得组合后 $m(\{a\}) = m(\{c\}) = 0$,而 $m(\{b\}) = 1.0$,即两个对焦元$\{b\}$支持度极小的证据,组合后却得到完全肯定的支持,显然是不合情理的.

(2)一票否决问题:当一条证据与多条证据完全不一致时,组合后会出现一票否决多条证据中共同的 bba.下面的例子说明了这一现象:

**例 3**　设辨识框架 $\Theta = \{a, b, c\}$,两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 的 bba 如下:

$$E_1: m_1(\{a\}) = 0.99\ ,\ m_1(\{b\}) = 0.01;$$

$$E_2: m_2(\{b\}) = 0.01\ ,\ m_2(\{c\}) = 0.99$$

由式(4)得两个证据组合后 $m(\{a\}) = m(\{c\}) = 0$,而 $m(\{b\}) = 1.0$.若再加入若干条证据 $E_3$、$E_4$、…、$E_n$: $E_3 = E_4 = \cdots = E_n = E_1$ 后,由式(4)仍得组合后 $m(\{a\}) = m(\{c\}) = 0$,而 $m(\{b\}) = 1.0$.尽管只有一条证据 $E_2$ 不支持焦元$\{a\}$,且其它所有的证据都对$\{a\}$有较高的支持度,但是结论却是 $m(\{a\}) = 0$,显然这一点也是不合直觉的.

(3)鲁棒性问题:焦元的 bba 发生微小扰动,组合结果会发生急剧变化.下面的例子说明了这一现象:

**例 4**　设辨识框架 $\Theta = \{a, b, c\}$,两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 的初始 bba 设置同例 2,现令证据 $E_1$ 和 $E_2$ 的 bba 发生微小的扰动,如下:

$$E_1: m_1(\{a\}) = 0.98, m_1(\{b\}) = 0.01, m_1(\Theta) = 0.01;$$

$$E_2: m_2(\{b\}) = 0.01, m_2(\{c\}) = 0.98, m_2(\Theta) = 0.01$$

由式(4)的结论可得组合后 $m(\{a\}) = m(\{c\}) = 0.49$, $m(\{b\}) = 0.015$, $m(\Theta) = 0.005$;这与例 3 的结果 $m(\{a\}) = m(\{c\}) = 0$, $m(\{b\}) = 1.0$ 相差甚远,这一现象也不是我们所期望的证据组合结果.

(4)公平性[9]问题:组合后某些焦元得到了不该得到的 bba,而某些焦元却没有得到应该得到的 bba.下面的例子说明了这一现象:

**例 5**　设辨识框架 $\Theta = \{a, b, c\}$,两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 的 bba 如下:

$$E_1: m_1(\{a, b\}) = 0.5, m_1(\{c\}) = 0.5;$$

$$E_2: m_2(\{a\}) = 0.5, m_2(\{b, c\}) = 0.5$$

由式(4)得组合后 $m(\{a\}) = m(\{b\}) = m(\{c\}) = 1/3$.其中 $m(\{a\}) = 1/3$ 是因为$\{a\}$得到了 $m_1(\{a, b\}) = 0.5$ 和 $m_2(\{a\}) = 0.5$ 的支持, $m(\{c\}) = 1/3$ 是因为焦元$\{c\}$得到了 $m_2(\{b, c\}) = 0.5$ 和 $m_1(\{c\}) = 0.5$ 的支持,而 $m(\{b\}) = 1/3$ 却是因为得到了 $m_1(\{a, b\}) = 0.5$ 和 $m_2(\{b, c\}) = 0.5$ 的支持,而没有诸如 $m_1(\{b\}) = 0.5$ 或 $m_2(\{b\}) = 0.5$ 的支持,所以组合后的 bba 对于焦元$\{a\}$和$\{c\}$是不公平的.

出现上述现象的原因是 Dempster 组合规则仅考虑了多个焦元之间的交关系,而没有考虑焦元间的交补关系.

(5)其它问题:①Dempster 组合规则要求各个证据必须是相互独立的;②组合规则也没有非常坚固的理论基础,其合理性和有效性仍存在较大争议;③组合规则在计算上存在着潜在的指数爆炸问题.

## 5　新组合规则

如前所述,Dempster 组合规则和其后的大部分改进的组合规则还是建立在交集的基础上,前面已指出基于交集的组合规则存在公平性等诸多不足.针对以上所有的问题,同时要满足 Dempster 组合规则优势的需求,我们提出一种基于均衡交补分担准则的证据组合新方法,该方法的主要思想是组合后的 bba 不仅由焦元的交集支配,而且由它们之间的交补关系均衡分担信度分配而起作用.

由文氏图理论知,两个集合 $A$ 和 $B$ 的交补关系由 4 种形式组成: $A^C \cap B^C$, $A^C \cap B$, $A \cap B^C$, $A \cap B$,其中 $A^C \cap B^C$ 为 $A$ 和 $B$ 之外的部分,在分配 mass 时不予考虑.接下来只考虑 $A^C \cap B$, $A \cap B^C$, $A \cap B$,为了叙述的方便,我们依次将其简记为: $B^A$, $A^B$, $AB$,显然有 $B^A \cup A^B \cup AB = A \cup B$,且这三部分两两互不相交,即 $B^A \cap A^B = \varnothing$, $B^A \cap AB = \varnothing$, $A^B \cap AB = \varnothing$,因此 $B^A$, $A^B$, $AB$ 是 $A \cup B$ 的一个划分,这一点可以从文氏图中直观的看出.现从二进制的观点查看 $A \cup B$ 的划分 $A^C \cap B$, $A \cap B^C$, $A \cap B$:如果用 0,1 分别表示 $A$ 和 $B$ 的补集和原集,则 $A^C \cap B$, $A \cap B^C$, $A \cap B$ 可表示为二进制的$(01)_2$, $(10)_2$, $(11)_2$,即十进制的数 1,2,3,共有 $2^2 - 1 = 3$ 个,其中指数 2 表示集合的个数,减去的 1 指的是所有集合补的交集元.上述结论易推广到任意多个集合的情况,在此不再赘述.

现以两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 为例说明新组合规则的思想:不妨设证据 $E_1$ 和 $E_2$ 中存在焦元 $A$ 和 $B$,其 bba 分别为 $m_1(A)$和 $m_2(B)$.根据文氏图可把 $m_1(A)$分为两部分: $m_1(A) = n_1(AB) + n_1(A^B)$,同理把 $m_2(B)$分成两部分: $m_2(B) = n_2(AB) + n_2(B^A)$.

$n_1(AB)$, $n_1(A^B)$、$n_2(AB)$, $n_2(B^A)$的取值如下:

$$n_1(AB)=\lambda_1 m_1(A) \tag{6}$$

$$n_1(A^B)=(1-\lambda_1)m_1(A) \tag{7}$$

$$n_2(AB)=\lambda_2 m_2(B) \tag{8}$$

$$n_2(B^A)=(1-\lambda_2)m_2(B) \tag{9}$$

$\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$是分配系数，且满足：若 $AB=\varnothing$，则 $\lambda_1=\lambda_2=0$；若 $A^B=\varnothing$，则 $\lambda_1=1$；若 $B^A=\varnothing$，则 $\lambda_2=1$；其它情况，因为从整体上看，$m_1(A)$和 $m_2(B)$均由两部分组成，所以取 $\lambda_1=\lambda_2=1/2$.

由上述可知 $m_1(A)$和 $m_2(B)$组合后的 bba 均由三部分组成：

$$\begin{aligned}m_1(A)m_2(B)&=\{n_1(AB)+n_1(A^B)\}\{n_2(AB)+n_2(B^A)\}\\&=n_1(AB)n_2(AB)+n_1(AB)n_2(B^A)\\&\quad+n_1(A^B)n_2(AB)+n_1(A^B)n_2(B^A)\\&=m(AB)+m(A^B)+m(B^A)\end{aligned} \tag{10}$$

因为根据均衡信度分配准则可知，子项 $n_1(AB)n_2(B^A)$分别按$\frac{n_1(AB)}{n_1(AB)+n_2(B^A)}$和$\frac{n_2(B^A)}{n_1(AB)+n_2(B^A)}$的比例支持 $AB$ 和 $B^A$；同理，子项 $n_1(A^B)n_2(AB)$分别按$\frac{n_1(A^B)}{n_1(A^B)+n_2(AB)}$和$\frac{n_2(AB)}{n_1(A^B)+n_2(AB)}$的比例支持 $A^B$ 和 $AB$，而子项 $n_1(A^B)n_2(B^A)$则分别按$\frac{n_1(A^B)}{n_1(A^B)+n_2(B^A)}$和$\frac{n_2(B^A)}{n_1(A^B)+n_2(B^A)}$的比例支持 $A^B$ 和 $B^A$. 所以由式(10)可得 $m(AB)$，$m(A^B)$，$m(B^A)$的取值如下：

$$\begin{aligned}m(AB)&=n_1(AB)n_2(AB)\\&\quad+\frac{n_1(AB)}{n_1(AB)+n_2(B^A)}n_1(AB)m_2(B^A)\\&\quad+\frac{n_2(AB)}{n_2(A^B)+n_2(AB)}n_1(A^B)n_2(AB)\\&=n_1(AB)n_2(AB)+\frac{\{n_1(AB)\}^2n_2(B^A)}{n_1(AB)+n_2(B^A)}\\&\quad+\frac{n_1(A^B)\{n_2(AB)\}^2}{n_1(A^B)+n_2(AB)}\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}m(A^B)&=\frac{n_1(A^B)}{n_1(A^B)+n_2(AB)}n_1(A^B)n_2(AB)\\&\quad+\frac{n_1(A^B)}{n_1(A^B)+n_2(B^A)}n_1(A^B)n_2(B^A)\\&=\frac{\{n_1(A^B)\}^2n_2(AB)}{n_1(A^B)+n_2(AB)}+\frac{\{n_1(A^B)\}^2n_2(B^A)}{n_1(A^B)+n_2(B^A)}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}m(B^A)&=\frac{n_2(B^A)}{n_1(AB)+n_2(B^A)}n_1(AB)n_2(B^A)\\&\quad+\frac{n_2(B^A)}{n_1(A^B)+n_2(B^A)}n_1(A^B)n_2(B^A)\\&=\frac{n_1(AB)\{n_2(B^A)\}^2}{n_1(AB)+n_2(B^A)}+\frac{n_1(A^B)\{n_2(B^A)\}^2}{n_1(A^B)+n_2(B^A)}\end{aligned} \tag{13}$$

当 $AB\neq\varnothing$，$A^B\neq\varnothing$，$B^A\neq\varnothing$时，将式(6)、(7)、(8)、(9)代入式(11)、(12)、(13)得：

$$m(AB)=\frac{1}{2}m_1(A)m_2(B) \tag{14}$$

$$\begin{aligned}m(A^B)&=\frac{1}{2}\frac{m_1(A)}{m_1(A)+m_2(B)}m_1(A)m_2(B)\\&=\frac{1}{2}\frac{\{m_1(A)\}^2m_2(B)}{m_1(A)+m_2(B)}\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}m(B^A)&=\frac{1}{2}\frac{m_2(B)}{m_1(A)+m_2(B)}m_1(A)m_2(B)\\&=\frac{1}{2}\frac{m_1(A)\{m_2(B)\}^2}{m_1(A)+m_2(B)}\end{aligned} \tag{16}$$

当 $AB\neq\varnothing$时，$m_1(A)m_2(B)$的 mass 分配给 $A^B$ 和 $B^A$，同理可得：

$$m(AB)=0 \tag{17}$$

$$\begin{aligned}m(A^B)&=\frac{m_1(A)}{m_1(A)+m_2(B)}m_1(A)m_2(B)\\&=\frac{\{m_1(A)\}^2m_2(B)}{m_1(A)+m_2(B)}\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}m(B^A)&=\frac{m_2(B)}{m_1(A)+m_2(B)}m_1(A)m_2(B)\\&=\frac{m_1(A)\{m_2(B)\}^2}{m_1(A)+m_2(B)}\end{aligned} \tag{19}$$

在已求 $m(AB)$，$m(A^B)$，$m(B^A)$的基础上，可求两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 组合后各个焦元的 bba. 不妨设 $C$ 是组合后的焦元，则其 bba 可由以下三部分求得：

$$m(C)=r_1(C)+r_2(C)+r_3(C) \tag{20}$$

$$\begin{aligned}r_1(C)=\sum_{C=AB}\Big\{&n_1(AB)n_2(AB)+\frac{\{n_1(AB)\}^2n_2(B^A)}{n_1(AB)+n_2(B^A)}\\&+\frac{n_1(A^B)\{n_2(AB)\}^2}{n_1(A^B)+n_2(AB)}\Big\}\end{aligned} \tag{21}$$

$$r_2(C)=\sum_{C=A^B}\left\{\frac{\{n_1(A^B)\}^2n_2(AB)}{n_1(A^B)+n_2(AB)}+\frac{\{n_1(A^B)\}^2n_2(B^A)}{n_1(A^B)+n_2(B^A)}\right\} \tag{22}$$

$$r_3(C)=\sum_{C=B^A}\left\{\frac{n_1(AB)\{n_2(B^A)\}^2}{n_1(AB)+n_2(B^A)}+\frac{n_1(A^B)\{n_2(B^A)\}^2}{n_1(A^B)+n_2(B^A)}\right\} \tag{23}$$

多个证据的组合公式的推理过程同上，限于篇幅，在此不再赘述. 下面以 Zadeh 悖论为例简单给出新组合规则的计算步骤：

**例 6** 设辨识框架 $\Theta=\{a,b,c\}$，两个证据 $E_1$ 和 $E_2$ 的 bba 如下：

$E_1$: $m_1(\{a\})=0.99$, $m_1(\{b\})=0.01$;

$E_2$: $m_2(\{b\})=0.01$, $m_2(\{c\})=0.99$

①将 $m_1(\{a\})=0.99$ 和 $m_2(\{b\})=0.01$ 代入式(18)、(19)得：$m(\{a\})=0.009801$，$m(\{b\})=0.000099$；

②将 $m_1(\{a\}) = 0.99$ 和 $m_2(\{c\}) = 0.99$ 代入式(18)、(19)得: $m(\{a\}) = 0.490050$, $m(\{c\}) = 0.490050$;

③将 $m_1(\{b\}) = 0.01$ 和 $m_2(\{b\}) = 0.01$ 代入式(10)得: $m(\{b\}) = 0.000100$;

④将 $m_1(\{b\}) = 0.01$ 和 $m_2(\{c\}) = 0.99$ 代入式(18)、(19)得: $m(\{b\}) = 0.000099$, $m(\{c\}) = 0.009801$;

最后, 由式(20)得:

$m(\{a\}) = 0.009801 + 0.490050 = 0.499851$;

$m(\{b\}) = 0.000099 + 0.000100 + 0.000099 = 0.000298$;

$m(\{c\}) = 0.490050 + 0.009801 = 0.499851$.

由计算结果可以看出, 新组合公式有效地解决了 Zadeh 悖论问题.

## 6 数值算例

为了验证基于均衡交补分担准则的证据组合规则(Lang 组合规则) 的有效性和可行性, 下面给出一个完整的算例, 通过 Lang 组合规则与 Dempster 组合规则[1]、Yager 组合规则[10]、Murphy 组合规则[6] 和 Zheng 组合规则[11] 的对比实验加以说明.

针对不同证据的 bba 上述五种组合方法的计算结果见表 1. 表中第 1 组和第 2 组证据说明了 Lang 组合规则仍然保持了原始 Dempster 组合规则的优点: 由第 1 组证据可以看出 Lang 组合规则保持了上述提到的原始 Dempster 组合规则的优点(2), 而 Murphy 组合规则和 Zheng 组合规则则没有该优势; 由第 2 组证据可得 Lang 组合规则保持了上述提到的原始 Dempster 组合规则的优点(3), 而 Yager 组合规则则没有该优势. 表中第 3、4、5 和 6 组证据表明了 Lang 组合规则克服了原始 Dempster 组合规则的缺陷: 由第 3 组证据可得 Lang 组合规则弥补了原始 Dempster 组合规则的不足(1), 有效地解决了 Zadeh 悖论问题, 而 Yager 组合规则仍存在 Zadeh 悖论缺陷; 由第 3 组和第 4 组证据可以看出 Lang 组合规则弥补了原始 Dempster 组合规则的鲁棒性不足(3); 由第 5 组证据可以看出 Lang 组合规则弥补了原始 Dempster 组合规则存在的一票否决不足(2), 而 Yager 组合规则仍存在上述不足, Murphy 组合规则和 Zheng 组合规则虽然部分解决了上述不足, 但组合后焦元 $\{a\}$ 的 bba 显然过大, 特别是利用 Zheng 组合规则后在不具备收敛条件的前提下 $\{a\}$ 的 bba 大于证据 5 中焦元 $\{a\}$ 的最大 bba 值 0.9. 由第 6 组证据可以看出 Lang 组合规则弥补了原始 Dempster 组合规则存在的公平性问题(4), 而 Yager 组合规则仍存在公平性的劣势.

**表 1　5 种证据组合规则的比较结果**

| | 第 1 组证据 bba | 第 2 组证据 bba | 第 3 组证据 bba | 第 4 组证据 bba | 第 5 组证据 bba | 第 6 组证据 bba |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 组合规划 | $\Theta = \{a, b\}$<br>$m_1(\{a\}) = 0.8$<br>$m_1(\{b\}) = 0.2$<br>$m_2(\Theta) = 1.0$ | $\Theta = \{a, b\}$<br>$m_1(\{a\}) = 0.6$<br>$m_1(\{b\}) = 0.4$<br>$m_2(\{a\}) = 0.6$<br>$m_2(\Theta) = 0.4$ | $\Theta = \{a, b, c\}$<br>$m_1(\{a\}) = 0.99$<br>$m_1(\{b\}) = 0.01$<br>$m_2(\{b\}) = 0.01$<br>$m_2(\{c\}) = 0.99$ | $\Theta = \{a, b, c\}$<br>$m_1(\{a\}) = 0.98$<br>$m_1(\{b\}) = 0.01$<br>$m_1(\Theta) = 0.01$<br>$m_2(\{b\}) = 0.01$<br>$m_2(\{c\}) = 0.98$<br>$m_2(\Theta) = 0.01$ | $\Theta = \{a, b, c\}$<br>$m_1(\{a\}) = 0.9$<br>$m_1(\{a, c\}) = 0.1$<br>$m_2(\{a\}) = 0.7$<br>$m_2(\Theta) = 0.3$<br>$m_3(\{b\}) = 0.5$<br>$m_3(\{c\}) = 0.5$ | $\Theta = \{a, b, c\}$<br>$m_1(\{a, b\}) = 0.5$<br>$m_1(\{c\}) = 0.5$<br>$m_2(\{a\}) = 0.5$<br>$m_2(\{b, c\}) = 0.5$ |
| Dempster 组合规划 | $m(\{a\}) = 0.80$<br>$m(\{b\}) = 0.20$ | $m(\{a\}) = 0.7895$<br>$m(\{b\}) = 0.2105$ | $m(\{b\}) = 1.0$ | $m(\{a\}) = 0.49$<br>$m(\{b\}) = 0.015$<br>$m(\{c\}) = 0.49$<br>$m(\Theta) = 0.005$ | $m(\{c\}) = 1.0$ | $m(\{a\}) = 1/3$<br>$m(\{b\}) = 1/3$<br>$m(\{c\}) = 1/3$ |
| Yager 组合规划 | $m(\{a\}) = 0.80$<br>$m(\{b\}) = 0.20$ | $m(\{a\}) = 0.60$<br>$m(\{b\}) = 0.16$<br>$m(\Theta) = 0.24$ | $m(\{b\}) = 0.0001$<br>$m(\Theta) = 0.9999$ | $m(\{a\}) = 0.0098$<br>$m(\{b\}) = 0.0003$<br>$m(\{c\}) = 0.0098$<br>$m(\Theta) = 0.9801$ | $m(\{c\}) = 0.015$<br>$m(\Theta) = 0.985$ | $m(\{a\}) = 0.25$<br>$m(\{b\}) = 0.25$<br>$m(\{c\}) = 0.25$<br>$m(\Theta) = 0.25$ |
| Murphy 组合规划 | $m(\{a\}) = 0.6087$<br>$m(\{b\}) = 0.1196$<br>$m(\Theta) = 0.2717$ | $m(\{a\}) = 0.7895$<br>$m(\{b\}) = 0.1579$<br>$m(\Theta) = 0.0526$ | $m(\{a\}) = 0.4999$<br>$m(\{b\}) = 0.0002$<br>$m(\{c\}) = 0.4999$ | $m(\{a\}) = 0.4996$<br>$m(\{b\}) = 0.0006$<br>$m(\{c\}) = 0.4996$<br>$m(\Theta) = 0.0002$ | $m(\{a\}) = 0.8696$<br>$m(\{b\}) = 0.0531$<br>$m(\{c\}) = 0.0729$<br>$m(a, c) = 0.0041$<br>$m(\Theta) = 0.0003$ | $m(\{a\}) = 0.30$<br>$m(\{b\}) = 0.20$<br>$m(\{c\}) = 0.30$<br>$m(a, b) = 0.10$<br>$m(b, c) = 0.10$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zheng<br>组合规划 | $m(\{a\})=0.6087$<br>$m(\{b\})=0.1196$<br>$m(\Theta)=0.2717$ | $m(\{a\})=0.7895$<br>$m(\{b\})=0.1579$<br>$m(\Theta)=0.0526$ | $m(\{a\})=0.4999$<br>$m(\{b\})=0.0002$<br>$m(\{c\})=0.4999$ | $m(\{a\})=0.4996$<br>$m(\{b\})=0.0006$<br>$m(\{c\})=0.4996$<br>$m(\Theta)=0.0002$ | $m(\{a\})=0.954$<br>$m(\{b\})=0.015$<br>$m(\{c\})=0.022$<br>$m(a,c)=0.005$<br>$m(\Theta)=0.004$ | $m(\{a\})=0.30$<br>$m(\{b\})=0.20$<br>$m(\{c\})=0.30$<br>$m(a,b)=0.10$<br>$m(b,c)=0.10$ |
| Lang<br>组合规划 | $m(\{a\})=0.7176$<br>$m(\{b\})=0.2824$ | $m(\{a\})=0.7407$<br>$m(\{b\})=0.2593$ | $m(\{a\})=0.49985$<br>$m(\{b\})=0.00030$<br>$m(\{c\})=0.49985$ | $m(\{a\})=0.499676$<br>$m(\{b\})=0.000465$<br>$m(\{c\})=0.499676$<br>$m(\{a,b\})=0.000025$<br>$m(\{a,c\})=0.000033$<br>$m(\{b,c\})=0.000025$<br>$m(\Theta)=0.0001$ | $m(\{a\})=0.690$<br>$m(\{b\})=0.152$<br>$m(\{c\})=0.154$<br>$m(a,c)=0.004$ | $m(\{a\})=0.396$<br>$m(\{b\})=0.208$<br>$m(\{c\})=0.396$ |

综上可知, Lang 组合规则解决了原始 Dempster 组合规则不足的同时,仍然保持了原始 Dempster 组合规则的优势,而其它的组合规则却不能完全实现保持优势和弥补劣势的统一解决.

## 7 结论

证据理论作为多元不确定性信息融合的有力工具,已在诸多领域彰显其优势.针对证据组合方法及其改进方案存在的问题,文中提出了一种基于均衡交补分担准则的证据组合新方法,该方法不但保持了原始 Dempster 组合规则中对信息不确定度的理解和收敛性等优势,而且弥补了其存在的 Zadeh 悖论、鲁棒性、一票否决和公平性等不足.

应该指出,文中提出的方法能有效解决已知的原始 Dempster 组合方法的不足,并保持其本有的优势,但限于目前对证据理论认识和研究上的限制,因此如何进一步研究原始 Dempster 组合方法的不足,如何进一步研究原始 Dempster 组合方法原本的优势,以及如何针对上述问题提出高效且实用的组合新规则是需要进一步研究的方向.

参考文献:

[1] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1967, 38(4): 325-339.

[2] Shafer G. A Mathematical Theory of Evidence[M]. Princeton University Press, Princeton, 1976.

[3] Otman Basir, Xiaohong Yuan. Engine fault diagnosis based on multi-sensor information fusion using Dempster-Shafer evidence theory[J]. Information Fusion, 2007, 8(4): 379-386.

[4] 赖海光,许峰,黄皓等.基于 Dempster-Shafer 证据理论的端口扫描检测方法[J].电子学报, 2006, 34(11): 1946-1950.

Lai Hai-guang, Xu Feng, Huang Hao, et al. A portscan detection method based on Dempster-Shafer theory of evidence[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(11): 1946-1950. (in Chinese)

[5] 诸葛建伟,王大为,陈昱等.基于 D-S 证据理论的网络异常检测方法[J].软件学报, 2006, 17(3): 463-471.

Zhuge Jian-wei, Wang Da-wei, Chen Yu, et al. A network anomaly detector based on D-S evidence theory[J]. Journal of Software, 2006, 17(3): 463-471. (in Chinese)

[6] Murphy C K. Combining belief functions when evidence conflicts[J]. Decision Support System, 2000, 29(1): 1-9.

[7] Shafer G, Shenoy P P, Mellouli K. Propagating belief functions in qualitative Markov trees[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 1987, 1(4): 349-400.

[8] Zadeh L. A simple view of the Dempster-Shafer theory of evidence and its implication for the rule of combination[J]. Artificial Intelligence Magazine, 1986, 7(1): 85-90.

[9] Voorbraak F. On the justification of Dempster rule of combination[J]. Artificial Intelligence, 1991, 48(2): 171-197.

[10] Yager R R. On the Dempster-Shafer framework and new combination rules[J]. Information Science, 1989, 41(2): 93-137.

[11] 邓勇,施文康,朱振福.一种有效处理冲突证据的组合方法[J].红外与毫米波学报, 2004, 23(1): 27-32.

Deng Yong, Shi Wen-kang, Zhu Zhen-fu. Efficient combination approach of conflict evidence[J]. Journal of Infrared Millimeter Waves, 2004, 23(1): 27-32. (in Chinese)

作者简介:

郎风华 男, 1977 年出生于山东潍坊,现为北京邮电大学博士研究生,主要研究方向:信息安全、信任管理、人工智能和现代密码学等.

E-mail: lang_fh@yahoo.cn

谷利泽 男, 1965 年出生于辽宁营口,现为北京邮电大学副教授,主要研究方向:信任管理、现代密码学、电子商务和网络安全等.

E-mail: glz_bupt@263.net